Probabilidade

Probabilidade

Fernando de Pol Mayer

Laboratório de Estatística e Geoinformação (LEG)
Departamento de Estatística (DEST)
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Sumário

Plano de aula

Introdução

"A razão do número de todos os casos favoráveis à um acontecimento, para o de todos os casos possíveis é a probabilidade buscada, a qual é portanto uma fração [...]"

"A teoria da probabilidade nada mais é do que o senso comum reduzido à cálculo."

— Pierre Simon Laplace

Ensaio Filosófico Sobre as Probabilidades (1812)

Introdução

A **Teoria das Probabilidades** é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e pesquisa **modelos** que podem ser utilizados para estudar **experimentos ou fenômenos aleatórios**

A **Inferência Estatística** é totalmente fundamentada na **Teoria das Probabilidades**

O **modelo** utilizado para estudar um fenômeno aleatório pode variar em complexidade, mas todos eles possuem ingredientes básicos comuns.

Tipos de experimentos

Experimentos determinísticos

Dizemos que um experimento é determinístico quando repetido inúmeras vezes, **em condições semelhantes**, conduz a resultados *essencialmente* idênticos. Ex.:

- Aceleração da gravidade
- Leis da Física e da Química

Experimentos aleatórios

Os experimentos que **repetidos sob as mesmas condições** geram resultados diferentes, são chamados de experimentos aleatórios. Ex.:

- Lançamento de uma moeda
- Lançamento de um dado
- Tempo de vida de um equipamento eletrônico

Introdução

O objetivo é construir um modelo matemático para representar **experimentos aleatórios**. Isso o corre em duas etapas:

1. Descrever o **conjunto** de resultados possíveis
2. Atribuir *pesos* a cada resultado, refletindo suas chances de ocorrência

Plano de aula

Experimentos e eventos

Um experimento, que ao ser realizado sob as mesmas condições não produz os mesmos resultados, é denominado um **experimento aleatório**. Exemplo: lançamento de uma moeda, medir altura, ...

O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é denominado **espaço amostral** (Ω). Pode conter um número finito ou infinito de pontos. Exemplo: {cara, coroa}, $\mathbb{R}$, ...

Os elementos do espaço amostral (**pontos amostrais**) são denotados por ω. Exemplo: $\omega_1 =$ cara, $\omega_2 =$ coroa.

Todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento aleatório, é um **evento**. Exemplo: A = "sair cara", B = "sair face par".

Exemplos

Experimento lançar o dado e observar o resultado da face.
Espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Pontos amostrais $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\ldots$, $\omega_6 = 6$.
Eventos A = "sair face par", B = $\{\omega : \omega \leq 4\}$.

Experimento retirar uma carta de um baralho de 54 cartas.
Espaço amostral $\Omega = \{\clubsuit A, \clubsuit 2, \ldots, \heartsuit A, \ldots, \spadesuit A, \ldots, \diamondsuit J, \diamondsuit Q, \diamondsuit K\}$.
Pontos amostrais $\omega_1 = \clubsuit A$, $\omega_2 = \clubsuit 2$, $\ldots$, $\omega_{54} = \diamondsuit K$.
Eventos A = "sair um ás", B = "sair uma letra", C = "sair carta de $\clubsuit$".

Experimento pesar um fruto ao acaso
Espaço amostral $\Omega = \mathbb{R}^+$.
Pontos amostrais espaço amostral é infinito.
Eventos A = "peso menor que 50g", B = $\{x : x \geq 100\text{g}\}$.

Exemplos

Exemplo 1: Considere um experimento em que você seleciona uma peça plástica moldada, e mede sua espessura.

1. Qual o espaço amostral?
2. Se é sabido que as peças só podem variar entre 10 e 11 mm de espessura, qual o espaço amostral?
3. Se o objetivo da análise for considerar apenas o fato de uma peça ter espessura baixa, média ou alta, qual o espaço amostral?
4. Se o objetivo for considerar o fato de uma peça obedecer ou não às especificações, qual o espaço amostral?

Exemplo 2: Duas peças plásticas são selecionadas e medidas.

1. Se o objetivo é verificar se cada peça obedece ou não às especificações, qual o espaço amostral?
2. Se o objetivo for somente o número de peças não conformes na amostra, qual o espaço amostral?
3. Considere que a espessura é medida até que se encontre a primeira peça fora das especificações. Qual o espaço amostral?

Operações com eventos

Usamos a **Teoria dos conjuntos** para definir operações com eventos

União é o evento que consiste da união de **todos** os pontos amostrais dos eventos que a compõem. Denotamos a união do evento A com B por $A \cup B$.
$A \cup B = \{\omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$

Interseção é o evento composto pelos pontos amostrais **comuns** aos eventos que a compõem. Denotamos a interseção de A com B por $A \cap B$.
$A \cap B = \{\omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$

Complemento é o conjunto de pontos do espaço amostral que não estão no evento. Denotamos o complemento do evento A por A^c.
$A^c = \{\omega \notin A\}$

Tipos de eventos

Disjuntos (mutuamente exclusivos) são eventos que possuem interseção nula, ou seja, $A \cap B = \{\varnothing\}$.

Complementares são eventos que a união é o espaço amostral, ou seja, $A \cup B = \Omega$.

Exemplo

Considere o lancamento de um dado e os eventos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$, $C =$ "face par", $D =$ "face primo".

- Uniões
  - $A \cup B =$
  - $A \cup C =$
  - $A \cup D =$
- Interseções
  - $A \cap B =$
  - $A \cap C =$
  - $A \cap D =$
- Complementos
  - $A^c =$
  - $B^c =$
  - $D^c =$

Exemplo

Considere o lancamento de um dado e os eventos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$, $C =$ "face par", $D =$ "face primo".

- Uniões
  - $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
  - $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
  - $A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Interseções
  - $A \cap B = \{1, 2, 3\}$
  - $A \cap C = \{2, 4\}$
  - $A \cap D = \{2, 3\}$
- Complementos
  - $A^c = \{5, 6\}$
  - $B^c = \{\omega : \omega > 3\}$
  - $D^c = \{1, 4, 6\}$

Exemplo

Sendo A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral, “traduza” para a linguagem da Teoria dos Conjuntos as seguintes situações:

a) Pelo menos um dos eventos ocorre
b) O evento A ocorre, mas B não
c) Nenhum deles ocorre

Plano de aula

Plano de aula

Definições de probabilidade

As probabilidades podem ser definidas de diferentes maneiras:

- Definição **clássica**
- Definição **frequentista**
- Definição subjetiva
- Definição axiomática

Definição Clássica

Consideramos um espaço amostral Ω com $n(\Omega)$ eventos simples, supondo que sejam **igualmente prováveis**. Seja A um evento de Ω, composto de $n(A)$ eventos simples. A probabilidade de A, $P(A)$ será

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Exemplo: Lança-se um dados honesto e observa-se a face voltada para cima. Determine a probabilidade de ocorrer a face 4

Exemplo: Lança-se um dados honesto e observa-se a face voltada para cima. Determine a probabilidade de ocorrer a face 4

- Experimento: lançar o dado e observar o resultado da face.
- Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Rightarrow \quad n(\Omega) = 6$
- Pontos amostrais: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\ldots$, $\omega_6 = 6$.
- Evento: ocorrer face 4. $A = \{4\} \quad \Rightarrow \quad n(A) = 1$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} = 0,1667$$

Com base nesse resultado, podemos afirmar que a cada 6 lançamentos de um dado, uma face será sempre 4?

Definições de probabilidade

Com base nesse resultado, podemos afirmar que a cada 6 lançamentos de um dado, uma face será sempre 4?

Não, pois cada lançamento é aleatório!

No entanto, se repetissemos o lançamento de um dado **inúmeras vezes**, a proporção de vezes em que ocorre o 4 seria aproximadamente 0,1667 $\Rightarrow$ **frequência relativa**

Definição frequentista

Podemos então pensar em repetir o experimento aleatório n vezes, e contar quantas vezes o evento A ocorre, $n(A)$. Dessa forma a frequência relativa de A nas n repetições será

$$f_{n,A} = \frac{n(A)}{n}$$

Para $n \to \infty$ repetições sucessivas e independentes, a frequência relativa de A tende para uma constante p

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n} = P(A) = p$$

Definições de probabilidade

Exemplo: Se um dado fosse lançado **10** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```r
## Tamanho da amostra
n <- 10
## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)
## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
    # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
    x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}
## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 3

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.3
```

Definições de probabilidade

Exemplo: Se um dado fosse lançado **100** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```
## Tamanho da amostra
n <- 100
## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)
## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
    # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
    x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}
## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 13

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.13
```

Probabilidade

Introdução
Experimentos e eventos
Probabilidade
Definições de probabilidade
Regra da adição
Probabilidade condicional
Regra da multiplicação
Independência de eventos
Referências

Exemplo: Se um dado fosse lançado **1000** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```r
## Tamanho da amostra
n <- 1000
## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)
## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
    # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
    x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}
## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 146

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.146
```

Definições de probabilidade

Exemplo: Se um dado fosse lançado **10000** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```r
## Tamanho da amostra
n <- 10000
## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)
## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
    # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
    x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}
## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 1586

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.1586
```

Definições de probabilidade

Exemplo: Se um dado fosse lançado **100000** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```r
## Tamanho da amostra
n <- 100000
## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)
## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
    # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
    x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}
## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 16616

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.16616
```

Definições de probabilidade

Exemplo: Se um dado fosse lançado **1000000** vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

```
## Tamanho da amostra
n <- 1000000
## Objeto para armazenar os resultados
x <- numeric(n)
## Estrutura de repetição
# Repetir n vezes
for(i in 1:n){
    # Amostra aleatória de tamanho 1 dos números 1 a 6
    x[i] <- sample(1:6, size = 1)
}
## Total de valores igual a 4 => n(A)
sum(x == 4)

[1] 166911

## Proporção de valores igual a 4 => n(A)/n
sum(x == 4)/length(x)

[1] 0.16691
```

Definições de probabilidade

Assim,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n} = P(A) \approx 0,1667$$

As probabilidades calculadas a partir de frequências relativas, são **estimativas** da verdadeira probabilidade

Lei dos Grandes Números

A Lei dos Grandes Números nos diz que as estimativas dadas pelas frequências relativas tendem a ficar melhores com mais observações.

Axiomas de probabilidade

Vamos considerar **probabilidade** como sendo uma função $P(\cdot)$ que associa valores numéricos à um evento A do espaço amostral, e que satisfaz as seguintes condições

i) $P(\Omega) = 1; \; P(\varnothing) = 0$

ii) $0 \leq P(A) \leq 1$

iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se, e seomente se $A \cap B = \varnothing$

Os axiomas asseguram que as probabilidades podem ser interpretadas como **frequências relativas**.

Exemplos

Lançam-se 3 moedas. Determine o espaço amostral. Para cada um dos eventos abaixo, descreva os conjuntos e determine as probabilidades:

a) Faces iguais
b) Cara na 1^a moeda
c) Coroa na 2^a e 3^a moedas

Plano de aula

Regra da adição

Notação: tabela de dupla entrada ou tabela de contingência

	A	B	Total
X	$P(A \cap X)$	$P(B \cap X)$	$P(X)$
Y	$P(A \cap Y)$	$P(B \cap Y)$	$P(Y)$
Total	$P(A)$	$P(B)$	1

- **Probabilidades marginais**: são as probabilidades individuais nas margens da tabela
- **Probabilidades conjuntas**: são as probabilidades de ocorrência de dois eventos simultâneos

Regra da adição

Considere a tabela de dupla entrada abaixo, que mostra o número de estudantes por sexo (F e M) e turma (A e B)

	F	M	Total
A	21	5	26
B	16	8	24
Total	37	13	50

Determine a probabilidade de um estudante selecionado ao acaso ser:

- Do sexo feminino, $P(F)$
- Do sexo masculino, $P(M)$
- Da turma A, $P(A)$
- Da turma B, $P(B)$

Regra da adição

Qual seria a probabilidade de escolhermos um estudante do sexo feminino ou da turma B?

Regra da adição

Qual seria a probabilidade de escolhermos um estudante do sexo feminino ou da turma B?

Queremos então $P(F \cup B)$

$$\begin{aligned} P(F \cup B) &= P(F) + P(B) \\ &= 0,74 + 0,48 \\ &= 1,22 \end{aligned}$$

o que não é possível pois a soma é superior a 1.

Regra da adição

Não é difícil ver que estamos somando alguns indivíduos 2 vezes, pois:

- Ao considerarmos apenas estudantes do sexo feminino, temos estudantes da turma A bem como da turma B
- Ao considerarmos estudantes da turma B, temos estudantes do sexo feminino e masculino

Assim, os estudantes do sexo feminino e da turma B, ou seja, o evento $F \cap B$ está incluído no evento F e no evento B

Logo precisamos subtrair uma vez $P(F \cap B)$ para obter a probabilidade correta.

Regra da adição

Nesse caso, pela tabela, vemos que a interseção $F \cap B$ resulta na probabilidade

$$P(F \cap B) = \frac{16}{50} = 0,32$$

E o resultado correto para $P(F \cup B)$ é

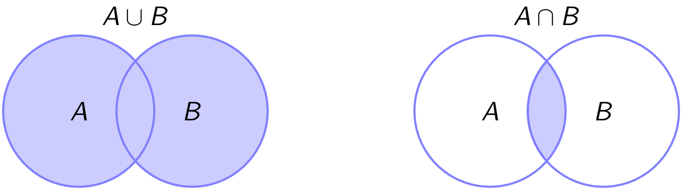
$$\begin{aligned} P(F \cup B) &= P(F) + P(B) - P(F \cap B) \\ &= 0,74 + 0,48 - 0,32 \\ &= 0,9 \end{aligned}$$

Regra da adição

Regra da adição

A probabilidade da união entre dois eventos quaisquer, A e B, é dada pela **regra da adição de probabilidades**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

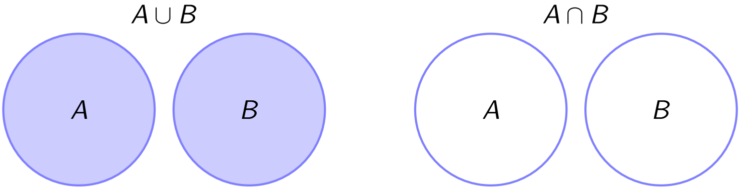


Regra da adição

Note que a regra da adição pode ser simplificada, **se e somente se** os eventos A e B forem **disjuntos** (ou mutuamente exclusivos)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

pois, neste caso, $A \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$



Regra da adição

Regra do complementar

Como consequência da regra da adição, obtemos que, para qualquer evento A,

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

Verifique através de $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c)$

Regra da adição

Considerando a tabela abaixo, identifique as probabilidades de um estudante:

	F	M	Total
A	21	5	26
B	16	8	24
Total	37	13	50

a) ser do sexo feminino ou masculino
b) ser do sexo masculino ou da turma A
c) não ser do turma B
d) ser da turma A ou da turma B
e) não ser do sexo feminino
f) ser da turma B ou do sexo masculino

Plano de aula

Probabilidade condicional

Em muitas situações práticas, o fenômeno aleatório com o qual trabalhamos pode ser separado em etapas.

A informação do que ocorreu em uma determinada etapa pode influenciar nas probabilidades de ocorrências das etapas sucessivas.

Nestes casos, dizemos que **ganhamos informação**, e podemos *recalcular* as probabilidades de interesse.

Estas probabilidades *recalculadas* recebem o nome de **probabilidade condicional**.

Probabilidade condicional

Para entender a ideia de probabilidade condicional, considere o seguinte exemplo:

- Um dado foi lançado, qual é a probabilidade de ter ocorrido face 4?
- Suponha que o dado foi jogado, e, sem saber o resultado, você recebe a informação de que ocorreu face par. Qual é a probabilidade de ter saido face 4 com essa “nova” informação?

Probabilidade condicional

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n(\Omega) = 6$

$A = \text{face } 4 = \{4\}$, $n(A) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$

$B = \text{face par} = \{2, 4, 6\}$, $n(B) = 3 \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$

$C = \text{face } 4\text{, dado que ocorreu face par} = \{4\}$,
$n(C) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(B)} = \frac{1}{3}$

Dado que B tenha ocorrido, o espaço amostral fica **reduzido** para B, pois todos os resultados possíveis passam a ser os aqueles do evento B.

Probabilidade condicional

Definição

Para dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral, o termo $P(A|B)$ denota a probabilidade de A ocorrer, dado que B ocorreu, e é definido como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

da mesma forma que a probabilidade de B ocorrer, dado que A ocorreu é definida como

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Probabilidade condicional

Voltando ao exemplo e aplicando a definição de probabilidade condicional:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$$

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{1/6}{3/6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Probabilidade condicional

Dessa forma, temos duas maneiras de calcular a probabilidade condicional $P(A|B)$:

1. Diretamente, pela consideração da probabilidade de A em relação ao espaço amostral reduzido B
2. Empregando a definição acima, onde $P(A \cap B)$ e $P(B)$ são calculadas em relação ao espaço amostral original Ω

Probabilidade condicional

Considere a tabela abaixo com o número de estudantes por sexo (F e M) e turma (A e B):

	F	M	Total
A	21	5	26
B	16	8	24
Total	37	13	50

Qual a probabilidade de que um estudante selecionado ao acaso seja da turma A, dado que é uma mulher?

Qual a probabilidade de que um estudante selecionado ao acaso seja homem, dado que é da turma B?

Exemplo

A tabela abaixo fornece um exemplo de 400 itens classificados por falhas (F = com falha, F^c = sem falha) na superfície e como defeituosos (D = defeituoso, D^c = não defeituoso).

Defeituoso	**Falhas**	
	F	F^c
D	10	18
D^c	30	342

Calcule:

- $P(D)$
- $P(D|F)$
- $P(D|F^c)$

Plano de aula

Regra da multiplicação

A regra da multiplicação é uma expressão derivada do conceito de probabilidade condicional. Uma vez que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

temos que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Com isso podemos obter a probabilidade de uma interseção pelo produto de uma probabilidade marginal com uma probabilidade condicional.

Regra da multiplicação

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A|B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) \end{aligned}$$

Regra da multiplicação

Essa expressão permite calcular probabilidades em espaços amostrais que são realizados em sequência, onde a ocorrência da *segunda* etapa **depende** da ocorrência da *primeira* etapa.

Exemplo: Considere uma urna com 3 bolas brancas e 7 bolas vermelhas. Duas bolas são retiradas da urna, uma após a outra, **sem reposição**. Determine o espaço amostral e as probabilidades associadas a cada ponto amostral.

Regra da multiplicação

Probabilidade de sairem 2 bolas brancas $\{B_1 B_2\}$

Probabilidade de sair branca e vermelha $\{B_1 V_2\}$

Probabilidade de sair vermelha e branca $\{V_1 B_2\}$

Probabilidade de sairem 2 bolas vermelhas $\{V_1 V_2\}$

Regra da multiplicação

Probabilidade de sairem 2 bolas brancas $\{B_1 B_2\}$

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{3}{10}\frac{2}{9} = \frac{2}{30}$$

Probabilidade de sair branca e vermelha $\{B_1 V_2\}$

$$P(B_1 \cap V_2) = P(B_1)P(V_2|B_1) = \frac{3}{10}\frac{7}{9} = \frac{7}{30}$$

Probabilidade de sair vermelha e branca $\{V_1 B_2\}$

$$P(V_1 \cap B_2) = P(V_1)P(B_2|V_1) = \frac{7}{10}\frac{3}{9} = \frac{7}{30}$$

Probabilidade de sairem 2 bolas vermelhas $\{V_1 V_2\}$

$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1)P(V_2|V_1) = \frac{7}{10}\frac{6}{9} = \frac{14}{30}$$

Exemplo

1. Num lote de 12 peças, 4 são defeituosas. Três peças são retiradas aleatoriamente, uma após a outra, sem reposição. Encontre a probabilidade de todas essas três peças serem não-defeituosas.
2. Qual a probabilidade de se obter dois ases em seguida, quando se extraem duas cartas de um baralho comum de 52 cartas, se:
   1. A primeira carta extraída não é reposta antes da extração da segunda carta.
   2. A primeira carta é reposta no baralho antes da extração da segunda carta.

Plano de aula

Independência de eventos

Vimos que para probabilidades condicionais, $P(A|B)$, saber que B ocorreu nos dá uma informação "extra" sobre a ocorrência de A

Porém, existem algumas situações nas quais saber que o evento B ocorreu, não tem qualquer interferência na ocorrência ou não de A

Nestes casos, podemos dizer que os aventos A e B são **independentes**

Independência de eventos

Os eventos A e B são **eventos independentes** se a ocorrência de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, ou seja, eventos A e B são independentes se

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e também que} \quad P(B|A) = P(B)$$

Com isso, e a regra da multiplicação, temos que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B)$$

Isso significa que se dois eventos são independentes, a probabilidade de ocorrência simultânea $P(A \cap B)$ é o produto das probabilidades marginais, $P(A)$ e $P(B)$.

Independência de eventos

Dessa forma, podemos verificar se dois eventos são independentes de duas formas:

1. Pela definição intuitiva

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$

Observação: se o evento A é independente do evento B, então nós esperamos que B também seja independente de A.

2. Pela definição formal

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

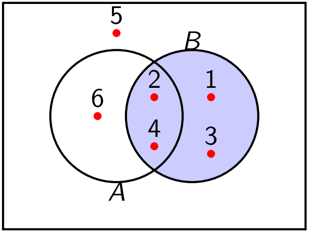
Exemplo

Lançamento de um dado

Considere o lançamento de um dado e os seguintes eventos

$$A = \text{"resultado é um número par"}$$
$$B = \text{"resultado é um número menor ou igual a 4"}$$

Os eventos A e B são independentes?



Exemplo

Pela definição intuitiva:

$$P(A) = 1/2, \quad P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{2/6}{4/6} = 1/2$$

$$P(B) = 2/3, \quad P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) = \frac{2/6}{3/6} = 2/3.$$

Portanto: $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$

Pela definição formal:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1/3$$

$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = 1/3$, assim $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Portanto, os eventos A e B são independentes. Saber que A ocorreu não muda a probabilidade de B ocorrer e vice-versa.

Exemplo

1. As probabilidades de um estudante ser aprovado em exames de matemática, inglês, ou de ambos são

$$P(M) = 0,7 \qquad P(I) = 0,8 \qquad P(M \cap I) = 0,56$$

   Verifique se os eventos M e I são independentes.

2. As probabilidades de chover em determinada cidade nos dias de natal (N), no dia de ano-novo (A), ou em ambos os dias são

$$P(N) = 0,6 \qquad P(A) = 0,6 \qquad P(N \cap A) = 0,42$$

   Verifique se os eventos N (“chover no natal”) e A (“chover no ano novo”) são independentes.

Exemplo

A tabela abaixo fornece um exemplo de 400 itens classificados por falhas (F = com falha, F^c = sem falha) na superfície e como defeituosos (D = defeituoso, D^c = não defeituoso).

Defeituoso	**Falhas**	
	F	F^c
D	2	18
D^c	38	342

Calcule:

- $P(D)$
- $P(D|F)$
- Compare estes resultados com aqueles do slide 51, e verifique, em cada caso, se os eventos D e F são independentes.

Plano de aula

Referências

- Bussab, WO; Morettin, PA. **Estatística básica**. São Paulo: Saraiva, 2006. [Cap. 5]
- Magalhães, MN; Lima, ACP. **Noções de Probabilidade e Estatística**. São Paulo: EDUSP, 2008. [Cap. 2]
- Montgomery, DC; Runger, GC. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2012. [Cap. 2]